第 4 节 圆与圆的位置关系（★★☆）

强化训练

1.（2023 • 江苏南京模拟 • ★）圆 $C_1: x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=9$ 的位置关系为（　　）

（A）外离　　（B）外切　　（C）内切　　（D）内含

答案：B

解析：判断两圆的位置关系，先计算圆心距，再与半径的和、差比较，

由题意，$C_1(0,0)$，$r_1=2$，$C_2(3,4)$，$r_2=3$，

所以 $|C_1C_2|=\sqrt{3^2+4^2}=5=r_1+r_2$，故两圆外切.

2.（2023 • 河南模拟 • ★）若圆 $C_1: x^2+y^2-4x+2y=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8x+10y+16=0$ 交于 P，Q 两点，则直线 PQ 的方程为_____.

答案：$x-2y-4=0$

解析：求两圆公共弦方程，直接用两圆方程作差，

用 C_1 和 C_2 的方程作差可得 $4x-8y-16=0$，化简得直线 PQ 的方程为 $x-2y-4=0$.

3.（★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2-kx-2y=0$ 和圆 $C_2: x^2+y^2-2ky-2=0$ 相交，则圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在的直线过的定点是（　　）

（A）$(2,2)$　　（B）$(2,1)$　　（C）$(1,2)$　　（D）$(1,1)$

答案：B

解析：求出两圆公共弦所在直线的方程，即可找到定点，

由两圆方程作差得：$-kx-2y+2ky+2=0$，整理得：$k(2y-x)+(2-2y)=0$，

令 $\begin{cases}2y-x=0\\2-2y=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，所以两圆公共弦所在直线过定点 $(2,1)$.

4.（2023 • 福建厦门模拟 • ★★）已知圆 $C_1: x^2+y^2-2\sqrt{3}x+a=0$ 与圆 $C_2: x^2+(y-1)^2=1$ 有两个公共点 A，B，若 $|AB|=2$，则实数 $a=$（　　）

（A）-6　　（B）-4　　（C）-2　　（D）0

答案：C

解法 1：用圆 C_1 和 C_2 的方程作差整理得直线 AB 的方程为 $2\sqrt{3}x-2y-a=0$，

圆 C_2 的圆心为 $C_2(0,1)$，半径 $r_2=1$，所以 C_2 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|-2-a|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2+a|}{4}$，

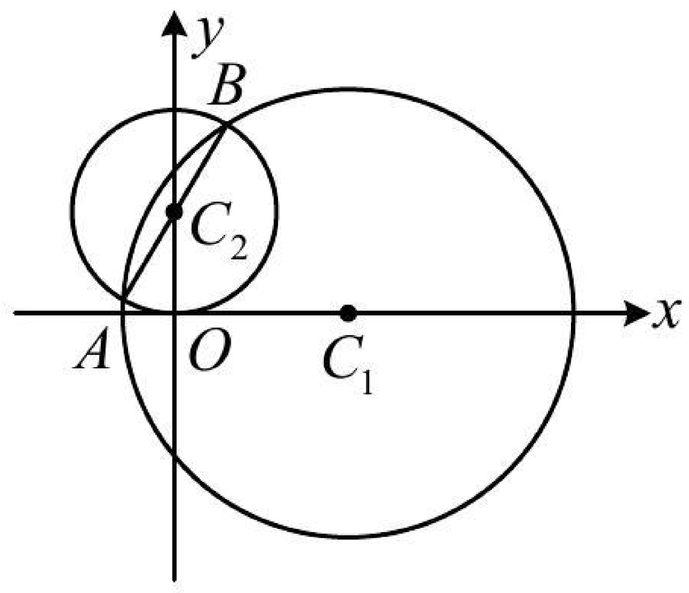
故 $|AB|=2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{1-\dfrac{(2+a)^2}{16}}$，由题意，$|AB|=2$，所以 $2\sqrt{1-\dfrac{(2+a)^2}{16}}=2$，解得：$a=-2$，

经检验，满足圆 C_1 与 C_2 相交.

解法 2：如图，用圆 C_1 和 C_2 的方程作差整理得直线 AB 的方程为 $2\sqrt{3}x-2y-a=0$ ①，

注意到$|AB|$恰好等于圆C_2的直径，于是直线AB过圆心C_2，故可由此快速求出a，

圆C_2的圆心为$C_2(0,1)$，代入①解得：$a=-2$，经检验，满足圆C_1与C_2相交.



5．（2022·湖北十堰模拟·★★）当圆$C:x^2+y^2-4x+2ky+2k=0$的面积最小时，圆C与圆$O:x^2+y^2=1$的位置关系是_____.

答案：相交

解析：圆的面积最小即半径最小，先把圆C化为标准方程，看看半径何时最小，

$x^2+y^2-4x+2ky+2k=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+k)^2=k^2-2k+4\Rightarrow$圆$C$的半径$r=\sqrt{k^2-2k+4}=\sqrt{(k-1)^2+3}$，

所以当$k=1$时，r最小，此时圆C的圆心为$C(2,-1)$，半径$r=\sqrt{3}$，

又圆O的圆心为$O(0,0)$，半径$r'=1$，所以$|OC|=\sqrt{5}$，

因为$\sqrt{3}-1<\sqrt{5}<\sqrt{3}+1$，所以$|r-r'|<|OC|<r+r'$，故两圆相交.

6．（2022·江西新余模拟·★★）已知圆$C:x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$与圆$O:x^2+y^2=4$有且仅有两条公切线，则正实数a的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　（B）$(0,3)$　（C）$(1,3)$　（D）$(3,+\infty)$

答案：C

解析：公切线条数可翻译成两圆的位置关系，两圆有两条公切线$\Leftrightarrow$两圆相交，

可由$|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2$来求a的范围，先算$|OC|$，

$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0\Rightarrow(x-a)^2+y^2=1$，所以圆$C$的圆心为$(a,0)$，半径$r_1=1$，圆$O$的半径$r_2=2$，

由题意，$a>0$，所以$|OC|=a$，故$|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2$即为$1<a<3$.

7．（★★）若圆$O:x^2+y^2=1$与圆$C:x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+m=0$相切，则实数$m$的值为_____.

答案：3或-5

解析：由题意，圆O的圆心为原点，半径$r_1=1$，$x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y+m=0\Rightarrow(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4-m$，

所以圆C的圆心为$C(\sqrt{3},1)$，半径$r_2=\sqrt{4-m}(m<4)$，故$|OC|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

两圆相切，有外切和内切两种情况，需分别考虑，

若两圆外切，如图1，应有$|OC|=r_1+r_2$，所以$2=1+\sqrt{4-m}$，解得：$m=3$；

若两圆内切，如图2，应有$|OC|=r_2-r_1$，所以$2=\sqrt{4-m}-1$，解得：$m=-5$；

综上所述，实数m的值为3或-5.

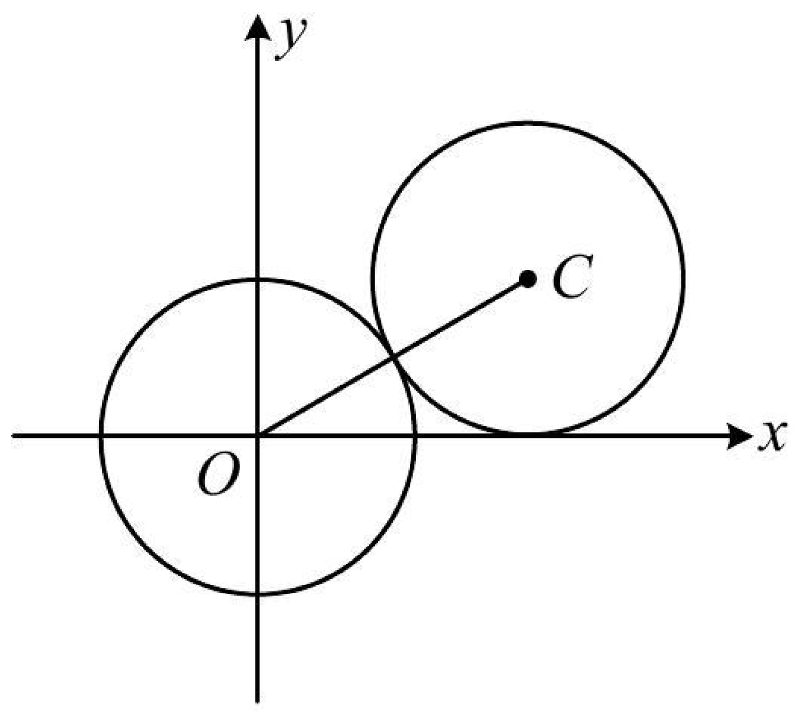


图1

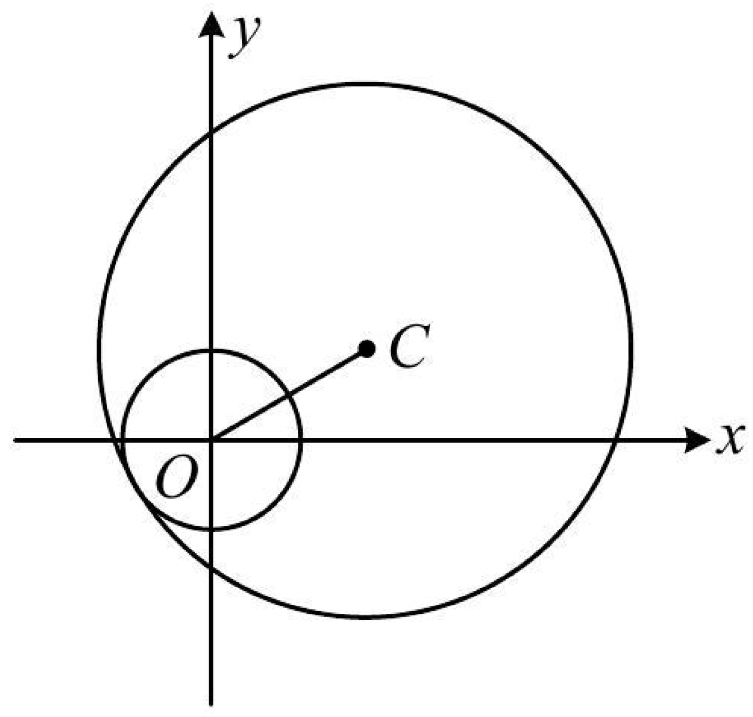


图2

8.（★★★）已知圆 $M:(x-2)^2+(y-2)^2=8$，圆 $N:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，若直线 l 与圆 M 和圆 N 都相切，则直线 l 的方程为_____.

答案：$x+y-8=0$

解法 1：公切线的条数由两圆的位置关系决定，故先判断两圆的位置关系，确定公切线有几条，

由题意，$M(2,2)$，$N(3,3)$，$r_1=2\sqrt{2}$，$r_2=\sqrt{2}\Rightarrow|MN|=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}=|r_1-r_2|\Rightarrow$两圆内切，

所以两圆有且仅有 1 条公切线，如图中的 l，显然 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+b$，即 $kx-y+b=0$，

可利用圆心 M，N 到 l 的距离等于各自的半径来建立方程组求解 k 和 b，

所以 $\begin{cases}\dfrac{|2k-2+b|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{2} & ① \\ \dfrac{|3k-3+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2} & ②\end{cases}$，从而 $|2k-2+b|=2|3k-3+b|$，

故 $2k-2+b=2(3k-3+b)$ 或 $2k-2+b=-2(3k-3+b)$，整理得：$b=4-4k$ 或 $b=-\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}$，

若 $b=4-4k$，代入①解得：$k=-1$，所以 $b=8$，故公切线 l 的方程为 $y=-x+8$，即 $x+y-8=0$；

若 $b=-\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}$，代入①整理得：$17k^2+2k+17=0$，无解；

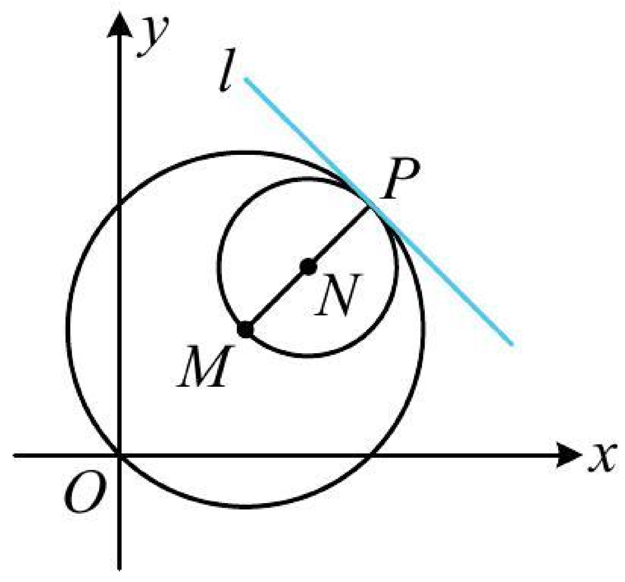
综上所述，直线 l 的方程为 $x+y-8=0$.

解法 2：判断两圆位置关系的过程同解法 1，要求 l 的方程，也可由 $MN\perp l$ 求斜率，再求点 P 的坐标，

直线 MN 的斜率 $k=\dfrac{3-2}{3-2}=1$，所以公切线 l 的斜率为 -1，

直线 MN 的方程为 $y-2=x-2$，即 $y=x$，联立 $\begin{cases}y=x \\ (x-2)^2+(y-2)^2=8\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=4 \\ y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0 \\ y=0\end{cases}$，

由图可知 $P(4,4)$，所以直线 l 的方程为 $y-4=-(x-4)$，整理得：$x+y-8=0$.



【反思】求公切线，除了设 $y=kx+b$，用两圆圆心到公切线距离等于各自半径建立方程组解 k 和 b 的方法

外，在两圆内切的条件下，也可直接求切点和斜率.

9.（2020•浙江卷•★★★）设直线 $l:y=kx+b(k>0)$，圆 $C_1:x^2+y^2=1$，$C_2:(x-4)^2+y^2=1$，若直线 l 与 C_1，C_2 都相切，则 $k=$_____，$b=$_____.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：先画图看两圆的位置关系，如图，两圆相离，有 4 条公切线，

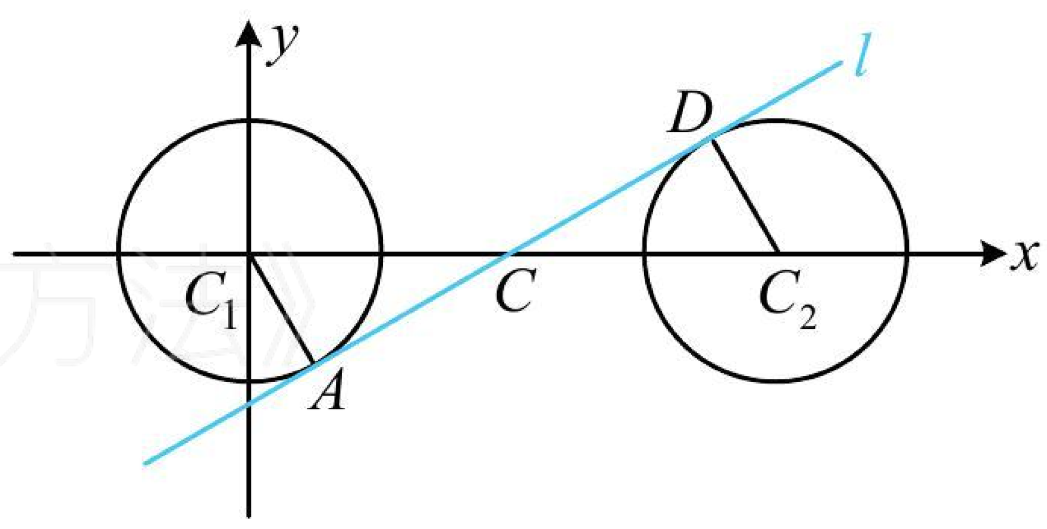
又 $k>0$，所以我们要求的是图中蓝线，注意到 $k=\tan\angle DCC_2$，故尝试算出 ΔDCC_2 的三边长，快速求出 k，

如图，$\begin{cases}\angle CAC_1=\angle CDC_2=90^\circ\\ \angle ACC_1=\angle DCC_2\\ |AC_1|=|DC_2|=1\end{cases}\Rightarrow \Delta ACC_1\cong\Delta DCC_2$，所以 $|CC_1|=|CC_2|$，故 C 为 C_1C_2 中点，

由题意，$C_1(0,0)$，$C_2(4,0)$，所以 $|CC_2|=2$，从而 $|CD|=\sqrt{|CC_2|^2-|DC_2|^2}=\sqrt{3}$，

故直线 l 的斜率 $k=\tan\angle DCC_2=\dfrac{|DC_2|}{|CD|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，此时若再求出 C 的坐标，就可写出 l 的方程，求得 b，

由 C 为 C_1C_2 中点知 $C(2,0)$，所以 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $b=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



【反思】本题当然也可由 C_1、C_2 到 l 的距离都等于 1 来建立方程组求解 k 和 b，但此法计算量大，所以在图形比较特殊的情况下，运用几何关系来计算公切线更简单.

10.（★★★）若圆 $C_1:x^2+y^2+2\sqrt{m}x+m-4=0(m>0)$ 和 $C_2:x^2+y^2-4\sqrt{n}y-1+4n=0(n>0)$ 恰有三条公切线，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为（　　）

（A）$\dfrac{1}{9}$　（B）$\dfrac{4}{9}$　（C）1　（D）3

答案：C

解析：$x^2+y^2+2\sqrt{m}x+m-4=0\Rightarrow(x+\sqrt{m})^2+y^2=4\Rightarrow C_1(-\sqrt{m},0)$，半径 $r_1=2$，

$x^2+y^2-4\sqrt{n}y-1+4n=0\Rightarrow x^2+(y-2\sqrt{n})^2=1\Rightarrow C_2(0,2\sqrt{n})$，半径 $r_2=1$，

要求 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值，可先把公切线的条数翻译成两圆的位置关系，寻找 m 和 n 满足的条件，

两圆有三条公切线 $\Rightarrow$ 两圆外切 $\Rightarrow|C_1C_2|=r_1+r_2$，

又 $|C_1C_2|=\sqrt{(-\sqrt{m}-0)^2+(0-2\sqrt{n})^2}=\sqrt{m+4n}$，所以 $\sqrt{m+4n}=3$，故 $m+4n=9$，

接下来可用常数代换法凑成积为定值，利用均值不等式来求$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值，

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{9}{9m}+\frac{9}{9n}=\frac{m+4n}{9m}+\frac{m+4n}{9n}=\frac{1}{9}+\frac{4n}{9m}+\frac{m}{9n}+\frac{4}{9}=\frac{4n}{9m}+\frac{m}{9n}+\frac{5}{9}\geq 2\sqrt{\frac{4n}{9m}\cdot\frac{m}{9n}}+\frac{5}{9}=1,$$

当且仅当$\frac{4n}{9m}=\frac{m}{9n}$时取等号，结合$m+4n=9$可得此时$m=3$，$n=\frac{3}{2}$，所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为 1.